PACS 02.10.Ox Combinatorics; graph theory

© 2012 г. В.А. Бондаренко, д-р физ.-мат. наук,
А.В. Николаев, канд. физ.-мат. наук,
М.Э. Сыманович
(Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова),
Р.О. Шемякин
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)

Об одной задаче распознавания на релаксациях разрезного многогранника[1]

Исследуется сложность задачи распознавания особого рода на релаксационных многогранниках задачи о максимальном разрезе графа. Устанавливаются характерные свойства точек релаксаций, которые препятствуют эффективному решению задачи распознавания.

1. Введение

Широко известно, что разнообразные вопросы управления сложными системами, как правило, сводятся к решению задач дискретной или комбинаторной оптимизации, которые в свою очередь часто представляют в виде моделей линейного и целочисленного программирования. Этим в значительной мере объясняется тот факт, что с различными аспектами линейного и целочисленного программирования связано большое число исследований, направленных на разработку эффективных по трудоемкости алгоритмов.

Рассматриваются две задачи, связанные с оптимизацией линейной целевой функции на целых вершинах некоторого выпуклого многогранника.

Первая задача – это хорошо известная задача целочисленного программирования:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x) = (c, x) : \ Ax \leqslant b,$$

где $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, матрица $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ договор 11.G34.31.0053.

Вторая задача описана в работе [1] (см. также [2]), где получила название *задачи распознавания целочисленности*. Ее постановку можно сформулировать в следующем виде:

Задача 1. Пусть $\bar{M}$ – некоторый класс выпуклых многогранников, определяемых линейными ограничениями. Пусть $M \in \bar{M}$, а Z – множество всех целых точек из M. Обозначим через $f(x) = (c, x)$ линейную целевую функцию. Требуется выяснить, выполняется ли равенство

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{z \in Z} f(z).$$

Таким образом, задача распознавания целочисленности направлена на вопрос: «Есть ли среди вершин многогранника, на которых заданная целевая функция достигает своего максимума, хотя бы одна целая?»

Нетрудно заметить, что решение задачи целочисленного программирования автоматически предполагает получение ответа для задачи распознавания целочисленности, в то время как обратное, строго говоря, не верно. Действительно, если в задаче распознавания целочисленности ответ положителен, то и задача целочисленного программирования будет решена. Однако если максимум целевой функции не достигается в целой вершине, то ответ для задачи целочисленного программирования остается по-прежнему не известен. Таким образом, в некотором смысле распознавание целочисленности является более простой задачей, нежели целочисленное программирование.

Тем не менее, в общем случае обе задачи относятся к труднорешаемым задачам, а именно, к классам NP-полных и NP-трудных задач, соответственно. В то же время в некоторых частных случаях, например на n-мерном единичном гиперкубе, обе задачи могут быть решены за полиномиальное время. Таким образом, интерес для изучения представляет некоторый «пограничный» пример многогранника, для которого эти две задачи относились бы к принципиально различным классам сложности.

В работе [1] было доказано, что известный [3, 4, 5] класс корневых полуметрических многогранников M_n удовлетворяет предъявленным требованиям. К задаче целочисленного программирования на корневом полуметрическом многограннике сводится известная NP-полная задача о максимальном разрезе графа [4, 5] и, соответственно, она относится к классу NP-трудных задач. В то же время, задача распознавания целочисленности на корневом полуметрическом многограннике полиномиально разрешима [1].

В основе полиномиальной разрешимости задачи распознавания целочисленности на корневом полуметрическом многограннике M_n лежит следующее свойство еще одной отличной от M_n релаксации разрезного многогранника $M_{n,3}$:

Утверждение 1. *Каждая точка многогранника $M_{n,3}$ является выпуклой комбинацией вершин многогранника M_n, среди которых есть хотя бы одна целая.*

Действительно, в силу данного утверждения для решения задачи распознавания целочисленности на корневом полуметрическом многограннике M_n достаточно сравнить максимумы заданной целевой функции на M_n и $M_{n,3}$ (двойное решение задачи линейного программирования, полиномиальные алгоритмы для которой хорошо известны), тогда, в случае равенства значений задача распознавания целочисленности предполагает ответ «да», а в случае различия – ответ «нет».

Данная статья посвящена изучению задачи распознавания целочисленности на многограннике $M_{n,3}$. Впервые этот вопрос был поставлен в работе [6], где были анонсированы некоторые результаты относительно поставленной задачи. Ниже полученные ранее результаты будут значительно улучшены, кроме того будут приведены принципиально новые доказательства ранее известных фактов.

2. Релаксации разрезного многогранника

Объектом исследования в статье являются релаксационные многогранники задачи о максимальном разрезе, поэтому предварительно напомним классический вариант построения многогранника задачи о максимальном разрезе.

Задача 2. *Заданы неориентированный граф $G = (V, E)$ и некоторая функция $C : E \to \mathbb{Z}^+$, каждому ребру $e \in E$ сопоставляющая неотрицательное целое число $C(e)$, называемое весом ребра.*

Требуется найти такое разбиение множества вершин V на два непересекающихся подмножества P и Q (разрез), чтобы сумма весов ребер из E, соединяющих вершины из множеств P и Q, была максимальной (максимальный разрез).

Каждому подмножеству $S \subseteq \mathbb{N}_n = \{1, ..., n\}$ (каждому разрезу) сопоставляется характеристический (0/1) вектор по следующему правилу:

$$\delta(S) \in \{0,1\}^d,\ d = C_n^2,\ \text{где}$$

$$\delta(S)_{i,j} = \begin{cases} 1,\ \text{если } |S \cap \{i,j\}| = 1, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Тогда разрезной многогранник $CUT(n)$ представляет собой выпуклую оболочку всех характеристических (разрезных) векторов:

$$CUT(n) = conv\{\delta(S) : S \in \mathbb{N}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Таким образом, вершинами разрезного многогранника $CUT(n)$ являются характеристические векторы всех возможных разрезов полного графа на n вершинах.

Задача о максимальном разрезе графа на n вершинах в оптимизационной форме сводится к задаче линейного программирования на разрезном многограннике $CUT(n)$ с целевой функцией, содержащей веса ребер [5, 7]. Однако применение эффективных алгоритмов линейного программирования требует построения полного внешнего описания разрезного многогранника: построения всех его фасет (гиперграней). Это задача до сих пор не решена и полное описание содержит, судя по всему, сверхэкспоненциальное количество линейных ограничений, не говоря о том, что каждая фасета может иметь сверхэкспоненциально большие коэффициенты в своем описании [5, 7].

Таким образом, интерес представляют так называемые релаксационные многогранники задачи о максимально разрезе, которые обладают значительно более простым внешним описанием, но по-прежнему оставляют возможность рассматривать на них задачу о максимальном разрезе как оптимизацию линейной функции. К ним, в частности, относится известный корневой полуметрический многогранник[1, 3, 5], внешние ограничения которого имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \tag{2}$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i},\ t_{i,j} = t_{j,i},\ y_{i,j} = z_{j,i}, \tag{4}$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \tag{5}$$

$$x_{i,j} \geqslant 0,\ y_{i,j} \geqslant 0,\ z_{i,j} \geqslant 0,\ t_{i,j} \geqslant 0, \tag{6}$$

где i, j, k, l независимо пробегают значения $1, ..., n$.

Заметим, что координаты точек многогранника M_n удобно представлять в виде блочной матрицы (Табл. 1, Приложение 2).

Многогранник M_n^Z, порождаемый выпуклой оболочкой целых вершин корневого полуметрического многогранника M_n совпадает с разрезным многогранником $CUT(n)$ [3, 5], поэтому M_n является релаксационным многогранником задачи о максимальном разрезе, или релаксацией разрезного многогранника, а сама задача о разрезе сводится к задаче целочисленного программирования на M_n.

Однако это не единственный способ построить релаксационный многогранник задачи о максимальном разрезе. Определим, следуя [5, 6], релаксации разрезного многогранника более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное k ($k \leqslant n$)

и рассмотрим систему неравенств S, задающую многогранник M_k^Z; обозначим через Θ число этих неравенств. Далее для каждого k-элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, ..., \nu_k\}$ множества $\mathbb{N}_n$ рассмотрим систему S_ν, получающуюся из системы неравенств S заменой переменных $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ и $t_{i,j}$, соответственно, на x_{ν_i,ν_j}, y_{ν_i,ν_j}, z_{ν_i,ν_j} и t_{ν_i,ν_j}. Дополним систему (1)-(6) совокупностью всех $\Theta \cdot C_n^k$ указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через $M_{n,k}$. Таким образом, релаксации $M_{n,k}$ представляют собой последовательность вложенных друг в друга многогранников:

$$CUT(n) \sim M_n^Z = M_{n,n} \subseteq M_{n,n-1} \subseteq \ldots \subseteq M_{n,k} \subseteq \ldots \subseteq M_{n,3} \subseteq M_{n,2} = M_{n,1} = M_n.$$

Первая, отличная от корневого полуметрического многогранника, релаксация $M_{n,3}$ разрезного многогранника была подробно описана в работе [1].

Если ввести новые обозначения для координат корневого полуметрического многогранника:

$$x_{i,j} = x_{i,j}^{1,1}, \quad y_{i,j} = x_{i,j}^{1,2}, \quad z_{i,j} = x_{i,j}^{2,1}, \quad t_{i,j} = x_{i,j}^{2,2},$$

то имеет место

Утверждение 2. *Многогранник $M_{n,3}$ задается системой неравенств (1)-(6) и дополнительными ограничениями вида:*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} \leqslant 1, \tag{7}$$

для каждой тройки индексов i, j, k, где $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ и всех векторов $a \in [1, 2]^n$.

В работе [8] приводятся ограничения следующих двух релаксаций $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$.

Утверждение 3. *Многогранник $M_{n,4}$ задается системой неравенств (1)-(7) и дополнительными ограничениями вида:*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} \leqslant 1, \tag{8}$$

для каждой четверки индексов i, j, k, l, где $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n$ и для всех векторов $a \in [1, 2]^n$.

Утверждение 4. *Многогранник $M_{n,5}$ определен системой неравенств (1)-(8) и дополнительными ограничениями вида:*

$$\forall i, j, k, l, p : \ 1 \leqslant i < j < k < l < p \leqslant n, \ \forall a, b \in [1, 2]^n,$$

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} + x_{p,p}^{a_p,a_p} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} -$$

$$-x_{i,p}^{a_p,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{j,p}^{a_p,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} - x_{k,p}^{a_p,a_k} - x_{l,p}^{a_p,a_l} \leqslant 1, \tag{9}$$

$$2\cdot(x_{i,i}^{b_i,b_i}+x_{j,j}^{b_j,b_j}+x_{k,k}^{b_k,b_k}+x_{l,l}^{b_l,b_l}+x_{p,p}^{b_p,b_p})-x_{i,j}^{b_j,b_i}-x_{i,k}^{b_k,b_i}-x_{i,l}^{b_l,b_i}-$$

$$-x_{i,p}^{b_p,b_i}-x_{j,k}^{b_k,b_j}-x_{j,l}^{b_l,b_j}-x_{j,p}^{b_p,b_j}-x_{k,l}^{b_l,b_k}-x_{k,p}^{b_p,b_k}-x_{l,p}^{b_p,b_l}\leqslant 3, \tag{10}$$

$$\forall i,j,k,l:\ 1\leqslant i<j<k<l\leqslant n,\ \forall p\in N_n\backslash\{i,j,k,l\},\forall c\in[1,2]^n:$$

$$3\cdot x_{p,p}^{1-c_p,1-c_p}+2\cdot(x_{p,i}^{c_i,c_p}+x_{p,j}^{c_j,c_p}+x_{p,k}^{c_k,c_p}+x_{p,l}^{c_l,c_p})-$$

$$-x_{i,j}^{c_j,c_i}-x_{i,k}^{c_k,c_i}-x_{i,l}^{c_l,c_i}-x_{j,k}^{c_k,c_j}-x_{j,l}^{c_l,c_j}-x_{k,l}^{c_l,c_k}\leqslant 3. \tag{11}$$

Для доказательства этих утверждений достаточно рассмотреть построенные данным образом многогранники $M_{4,4}$ и $M_{5,5}$ и показать, что они обладают только целочисленными вершинами и равны M_4^Z и M_5^Z, соответственно. Для этого можно воспользоваться любым специализированным программным обеспечением для построения многомерной выпуклой оболочки множества точек, например [9, 10].

3. Задача распознавания целочисленности на $M_{n,3}$ и 3-однородные смешанные гиперграфы. Основные результаты.

Задача распознавания целочисленности на многограннике $M_{n,3}$ является NP-полной, так как к ней можно свести [6] известную NP-полную задачу о 3-выполнимости при различных литералах (not-all-equal 3-SAT, NAE-3-SAT) [11]. В этом состоит принципиальное отличие задачи распознавания целочисленности на $M_{n,3}$ от более общего случая корневого полуметрического многогранника M_n, на котором задача распознавания целочисленности полиномиально разрешима [1].

В то же время, если свойство Утверждения 1 наследуется многогранником $M_{n,3}$ и любая точка некоторой релаксации $M_{n,k}$ представляет собой выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$, одна из которых обязательно целая, то повторив рассуждения из работы [1] и сравнив максимумы заданной целевой функции на многогранниках $M_{n,k}$ и $M_{n,3}$, можно решить задачу распознавания целочисленности на $M_{n,3}$ двойным применением линейного программирования.

В работе [6] описана связь между свойствами точек релаксаций $M_{n,k}$ разрезного многогранника и 3-однородными смешанными гиперграфами $G=(V,E,A)$ специального вида, где

- V - множество вершин, $V=N_n=\{1,...,n\}$;
- E - множество неориентированных ребер, $E=\{(i,j,k)\}\subseteq N_n\times N_n\times N_n$;

- A - множество ориентированных ребер, $A = \{((i,j),k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n$, где пара вершин (i,j) - начало ребра, вершина k - конец ребра.

Введем операцию *инвертирования i-той вершины* гиперграфа $G = (V, E, A)$, которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i,j,k) \to ((j,k),i), \quad ((j,k),i) \to (i,j,k), \quad ((i,j),k) \to ((i,k),j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф $G' = Inv_i G = (V, E', A')$.

Аналогично определим операцию *инвертирования подмножества вершин* гиперграфа G, таким образом, что $Inv_{i,j,k}(G) = Inv_i(Inv_j(Inv_k(G)))$.

Введем класс G_I так называемых «неинвертируемых» гиперграфов $G = (V, E, A)$, для которых множество неориентированных ребер E не пусто и остается непустым при всех возможных инверсиях. То есть:

$$G = (V, E, A) \in G_I \Leftrightarrow \begin{cases} E \neq \oslash, \\ \forall W \subseteq V: \;\; Inv_W(G) \in G_I. \end{cases}$$

В работе [6] приведено следующее

У т в е р ж д е н и е 5. *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» является NP-полной.*

Действительно, если рассмотреть подмножество гиперграфов рассматриваемого вида $G = (V, E, 0)$ с пустым множеством ориентированных ребер, то, нетрудно проверить, что задача распознавания принадлежности классу G_I эквивалентна известной NP-полной задаче 2-раскрашиваемость 3-однородного гиперграфа (или проверке 3-однородного гиперграфа на двудольность) [11].

Каждой точке $u \in M_{n,3}$ сопоставим 3-однородный смешанный гиперграф рассматриваемого вида, который назовем гиперграфом точки $G(u)$, по следующим правилам:

1) $V = N_n$;

2) $(i,j,k) \in E(u)$ тогда и только тогда, когда $y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2$;

3) $((i,j),k) \in A(u)$ тогда и только тогда, когда $y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2$.

Отметим, что ребра гиперграфа некоторой точки u многогранника $M_{n,3}$ при таком построении соответствуют «новым» фасетам $M_{n,3}$ (отличным от гиперграней корневого полуметрического многогранника M_n).

Для точек многогранника $M_{n,3}$ в работе [6] сформулирована

Теорема 1. Если для некоторой точки $u \in M_{n,3}$ ее гиперграф $G(u)$ принадлежит классу «неинвертируемых» гиперграфов G_I, то в любом разложении u в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.

Доказательство Теоремы 1 дано в Приложении 1.

Таким образом, точки многогранника $M_{n,3}$ гиперграфы которых «неинвертируемы» являются в некотором роде «плохими». Именно они препятствуют эффективному решению задачи распознавания целочисленности на многограннике. Однако, в случае корневого полуметрического многогранника M_n все подобные «плохие» точки, которые представляют собой лишь выпуклые комбинации нецелочисленных вершин (т.е. принадлежат фасетам, имеющим только нецелочисленные вершины), удалось отсечь, наложив полиномиальное ($\frac{2n(n-1)(n-2)}{3}$) число дополнительных линейных ограничений, которые и образовали многогранник $M_{n,3}$. Если бы удалось отсечь все «плохие» точки многогранника $M_{n,3}$ некоторой релаксацией $M_{n,k}$, тогда возможно было бы построить полиномиальный алгоритм решения задачи распознавания целочисленности на $M_{n,3}$ и, соответственно задачи NAE-3-SAT.

Отметим, что речь не идет об усечении многогранника до полностью целочисленного, что, безусловно, решило бы проблему с «плохими» точками. Однако, многогранник $M_{n,3}^Z (= M_n^Z)$ эквивалентен разрезному многограннику и обладает сверхэкспоненциальным числом гиперграней. Напротив, в случае корневого полуметрического многогранника удалось полиномиальным (порядка n^3) числом дополнительных ограничений перейти к, по-прежнему, нецелочисленному многограннику $M_{n,3}$ и решить задачу распознавания целочисленности.

В работах [6, 8] было установлено, что ограничений следующих двух релаксаций разрезного многогранника $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$ не достаточно для отсечения всех «плохих» точек $M_{n,3}$, и они не могут быть использованы для построения эффективного решения задачи распознавания целочисленности. Используя новые идеи в доказательстве, полученную ранее оценку можно улучшить более чем в 16 раз.

Теорема 2. Для любых $n \geqslant 5$ и $q \geqslant 12$ найдутся точки $u \in M_{n,4}$ и $v \in M_{q,5}$, в любом разложении которых в выпуклые комбинации вершин многогранника $M_{n,3}$ ($M_{q,3}$ соответственно) нет ни одной целой вершины.

Доказательство Теоремы 2 дано в Приложении 1.

Примеры точек u и v для многогранников $M_{5,4}$ и $M_{12,5}$ приведены в Табл. 3 и 4 (Приложение 2).

Отметим, что ограничения многогранника $M_{n,5}$ являются достаточно мощными и позволяют отсечь значительное число «плохих» точек многогранника $M_{n,3}$, однако и их недостаточно для решения задачи распознавания целочисленности на $M_{n,3}$ и, соответственно, задачи NAE-3-SAT.

Вопрос с наличием подобных точек у последующих релаксаций $M_{n,6}$ и далее остается открытым.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Введем для точек многогранника $M_{n,3}$ операцию *инвертирования*, которая произвольную точку $u \in M_{n,3}$ превращает в точку $v = Inv_j(u)$ (Табл. 2, Приложение 2).

Нетрудно проверить, что так построенная точка v удовлетворяет системе (1)-(7) и также принадлежит многограннику $M_{n,3}$.

Отметим, что операции инвертирования точки многогранника $M_{n,3}$ и вершины гиперграфа G эквивалентны в том смысле, что для точки $v = Inv_j(u)$ ее гиперграф $G(v) = Inv_j G(u)$.

Предположим противное, т.е. предположим, что точка u раскладывается в выпуклую комбинацию вершин, среди которых есть хотя бы одна целая:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k,$$

$$\forall i : \alpha_i > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

$$\exists i : v_i \in ext M^Z_{n,3}.$$

Без ограничения общности положим, что целой является вершина $v_1 = v \in ext M^Z_{n,3}$, тогда:

$$u = \alpha v + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k,$$

$$\sum_{i=2}^{k} \alpha_i = 1 - \alpha,$$

$$w = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k),$$

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\alpha} = 1 \;\Rightarrow\; w \in M_{n,3},$$

$$u = \alpha v + (1-\alpha) w.$$

Нетрудно проверить, что:

$$\forall i : Inv_i(u) = \alpha(Inv_i(v)) + (1-\alpha)(Inv_i(w)).$$

Вершина v является целой, любая ее инверсия ($Inv_i(v)$) также будет целой вершиной $M_{n,3}$. Учитывая, что множество целочисленных вершин многогранника M_n эквивалентно множеству вершин разрезного многогранника $CUT(n)$, инвертировав точки u, v и w несколько раз, можно получить:

$$u^* = \alpha v^* + (1-\alpha)w^*,$$
$$v^* : \forall i, j : x_{i,j}^{v^*} = 1.$$

Гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, следовательно, $G(u^*) = (V, E^*, A^*)$ также принадлежит G_I. Тогда:

$$\exists i, j, k : \ (i, j, k) \in E^*,$$

$$y_{i,j}^{u^*} + z_{i,j}^{u^*} + y_{i,k}^{u^*} + z_{i,k}^{u^*} + y_{j,k}^{u^*} + z_{j,k}^{u^*} = 2,$$
$$y_{i,j}^{v^*} + z_{i,j}^{v^*} + y_{i,k}^{v^*} + z_{i,k}^{v^*} + y_{j,k}^{v^*} + z_{j,k}^{v^*} = 0,$$
$$w^* = \frac{u^* - \alpha v^*}{1-\alpha},$$
$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} = \frac{2}{1-\alpha},$$
$$\alpha > 0, \qquad \frac{2}{1-\alpha} > 2,$$
$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} > 2.$$

Противоречие, точка w не принадлежит многограннику $M_{n,3}$, а значит, точка u представляет собой выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$, среди которых нет ни одной целой.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим два смешанных гиперграфа G_5 и G_{12}, приведенного вида, заданных своими списками ребер

$$G_5 = (\mathbb{N}_5, E_5, \oslash), \text{ где}$$

$$E_5 = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5)\}.$$

$$G_{12} = (\mathbb{N}_{12}, E_{12}, \oslash), \text{ где}$$

$$E_{12} = \{(1,5,6), (1,5,8), (1,5,10), (1,5,12), (1,6,10), (1,6,11), (1,7,10), (1,7,12), (1,8,12),$$
$$(1,11,12), (2,3,6), (2,3,7), (2,3,8), (2,3,11), (2,4,5), (2,4,7), (2,4,8), (2,4,11),$$
$$(2,5,6), (2,5,8), (2,6,11), (3,6,10), (3,6,11), (3,7,10), (3,7,12), (3,8,12), (3,11,12),$$

$$(4,5,8),(4,5,10),(4,7,9),(4,7,10),(4,8,9),(4,9,10),(4,9,11),(5,6,10),(5,8,12),$$
$$(6,9,10),(6,9,11),(7,9,10),(7,9,12),(8,9,12),(9,11,12)\}.$$

Лемма 1. Гиперграфы G_5 и G_{12} принадлежат классу «неинвертируемых» гиперграфов G_I.

Доказательство леммы 1. Прежде всего, отметим, что для принадлежности графов G_5 и G_{12} множеству «неинвертируемых» гиперграфов G_I достаточно проверить, что инверсия любого подмножества их вершин содержит неориентированное ребро. Ввиду малого размера графов для этого потребуется перебор $2^5 = 32$ и $2^{12} = 4096$ вариантов, соответственно, что не составляет никакого затруднения. Однако простота перебора связано здесь, лишь, со сравнительно небольшим размером графов. Так в примере из статьи [6] в аналогичной теореме фигурировал гиперграф на 195 вершинах, что потребует перебора $2^{195} \approx 5 \times 10^{58}$ вариантов. Поэтому, имеет смысл предложить алгоритм проверки принадлежности гиперграфа классу G_I, значительно превосходящий по эффективности полный перебор.

Каждому гиперграфу $G = (V, E, A)$ рассматриваемого вида мы сопоставим задачу 3-выполнимость 3-SAT(G) по следующим правилам:

1) с каждой вершиной $i \in V$ гиперграфа G свяжем логическую переменную x_i;

2) каждому неориентированному ребру $(i, j, k) \in E$ сопоставим пару дизъюнкций $x_i \vee x_j \vee x_k$ и $\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k$;

3) каждому ориентированному ребру $((i, j), k)$ также сопоставим пару дизъюнкций $x_i \vee x_j \vee \bar{x}_k$ и $\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee x_k$.

Гиперграф G принадлежит классу G_I, если инверсия любого подмножества его вершин $Inv_W(G)$ содержит хотя бы одно неориентированное ребро. Рассмотрим произвольное подмножество вершин $W \subseteq V$ и каждой логической переменной x_i, где $i \in W$ задачи 3-SAT(G) сопоставим значение 1. Остальные логические переменные примут значение 0.

Предположим, что гиперграф G не принадлежит классу G_I. Построим инверсию его вершин $Inv_W(G)$, которая не содержит ни одного неориентированного ребра. Если в гиперграфе G есть неориентированное ребро (i, j, k), то мы не можем не инвертировать ни одной его вершины (набор значений логических переменных $x_i = 0$, $x_j = 0$ и $x_k = 0$) и не можем инвертировать все его вершины (набор значений логических переменных $x_i = 1$, $x_j = 1$ и $x_k = 1$). Эти два набора отсекаются дизъюнкциями

$x_i \vee x_j \vee x_k$ и $\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k$. Аналогично, если гиперграфу G принадлежит ориентированное ребро $((i,j),k)$, то нельзя инвертировать одну лишь вершину k ($x_i = 0$, $x_j = 0$ и $x_k = 1$) или только пару вершин i, j ($x_i = 1$, $x_j = 1$ и $x_k = 0$). Эти наборы, соответственно, отсекаются дизъюнкциями $x_i \vee x_j \vee \bar{x}_k$ и $\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee x_k$.

Имеем, гиперграф G принадлежит классу G_I, тогда и только тогда, когда набор дизъюнкций задачи 3-SAT(G) невыполним.

Таким образом, доказательство теоремы можно свести к проверке того факта, что наборы дизъюнкций задач 3-SAT(G_5) (5 логических переменных, 20 дизъюнкций) и 3-SAT(G_{12}) (12 логических переменных, 84 дизъюнкции) невыполнимы. Для этого достаточно воспользоваться любым программным обеспечением для решения задачи 3-SAT [12, 13]. Несмотря на то, что эта задача принадлежит классу NP-полных задач, современные, так называемые «state-of-the-art» алгоритмы ее решения значительно превосходят по эффективности полный перебор.

Лемма 1 доказана.

В соответствии с Теоремой 1, для доказательства существования «плохих» точек релаксации $M_{n,k}$, в любом разложении которых по вершинам многогранника $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины, достаточно построить точки, гиперграфы которых содержат G_5 или G_{12} в качестве подграфов.

Рассмотрим точки u и v многогранников $M_{5,3}$ и $M_{12,3}$, координаты которых приведены в Табл. 3 и 4 (Приложение 2).

С учетом Теоремы 1 и Леммы 1, для доказательства теоремы достаточно показать, что гиперграфы $G(u)$ и $G(v)$ совпадают с гиперграфами G_5 и G_{12}, соответственно, и принадлежат классу G_I, и проверить, что точки u и v подпадают под ограничения многогранников $M_{5,4}$ и $M_{12,5}$.

Две эти проверки можно объединить и показать, что точки u и v принадлежат граням многогранников $M_{5,4}$ и $M_{12,5}$, полученных при пересечении фасет, соответствующим ребрам гиперграфов G_5 и G_{12}. Многогранник $M_{5,4}$ определяется ограничениями (1)-(8) общим числом 265 (а также 10 ограничений фасет для ребер G_5), многогранник $M_{12,5}$ определяется ограничениями (1)-(11) общим числом порядка 1.8×10^5, которые легко генерируются комбинаторно (Утверждения 2-4). Принадлежность точек u и v многогранникам $M_{5,4}$ и $M_{12,5}$, заданным внешним описанием, легко проверить с помощью любого соответствующего программного обеспечения. Так, авторами для проверки (а также для нахождения точки v) были использованы специализированные программы для решения задачи линейного программирования lp_solve и GLPK (GNU Linear Programming Kit) [14, 15].

Теорема 2 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

$x_{i,j}$	$y_{i,j}$
$z_{i,j}$	$t_{i,j}$

Таблица 1. Блок координат.

$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$
0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$
		$\boldsymbol{x_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{x_{j,k}}$	$\boldsymbol{y_{j,k}}$
		0	$\boldsymbol{t_{j,j}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$
				$x_{k,k}$	0
				0	$t_{k,k}$

$\Rightarrow$

$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$
0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$
		$\boldsymbol{t_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{y_{j,k}}$	$\boldsymbol{x_{j,k}}$
		0	$\boldsymbol{x_{j,j}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$
				$x_{k,k}$	0
				0	$t_{k,k}$

Таблица 2. Операция инвертирования точки.

$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
				$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
				0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
						$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
						0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
								$\frac{1}{2}$	0
								0	$\frac{1}{2}$

Таблица 3. Координаты точки u многогранника $M_{5,4}$.

$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
				$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
				0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
						$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
						0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
								$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
								0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
										$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
										0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
												$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
												0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
														$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
														0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
																$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
																0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
																		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
																		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
																				$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
																				0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
																						$\frac{1}{2}$	0
																						0	$\frac{1}{2}$

Таблица 4. Координаты точки v многогранника $M_{12,5}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко В.А., Урываев Б.В.* Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2007. №6. С. 18–23.

   Bondarenko V.A., Uryvaev B.V. On one problem of integer optimization // Automation and Remote Control. 2007. Vol. 68. Issue 6. pp 948-953.

2. *Босс В.* Лекции по математике. Том 10. Перебор и эффективные алгоритмы. М.: ЛКИ, 2008. 216 с.

3. *Бондаренко В.А.* Об одном комбинаторном многограннике / Моделирование и анализ вычислительных систем. Сб. науч. тр. Ярославль: Яросл. гос. ун-т. 1987. С. 133–134.

4. *Padberg M.V.* The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. V. 45. 1989. pp. 139–172.

5. *Deza M.M., Laurent M.* Geometry of Cuts and Metrics (Algorithms and Combinatorics). 2nd edition. Springer. 2009. 600 p.

6. *Бондаренко В.А., Николаев А.В.* Об одном классе гиперграфов и о вершинах релаксаций разрезного многогранника // Доклады академии наук. 2012. Т.442. №3. С. 300–302.

   Bondarenko V.A., Nikolaev A.V. A class of hypergraphs and vertices of cut polytope relaxations // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 85. Issue 1. pp 46-47.

7. *Ziegler G.M.* Lectures on 0-1 polytopes // Polytopes - Combinatorics and Computation (G. Kalai and G.M. Ziegler, eds.), DMV Seminars Series. Birkh"auser Basel. 2000. 45 p.

8. *Николаев А.В.* Гиперграфы специального вида и анализ свойств релаксаций разрезного многогранника // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18. № 3. С. 82–100.

9. *Gawrilow E., Joswig M.* Polymake: a framework for analyzing convex polytopes // Polytopes—combinatorics and computation (Oberwolfach, 1997). DMV Sem., 29, Birkhдuser, Basel, 2000. pp. 43—73.

10. *Christof T., Loebel A.* PORTA: POlyhedron Representation Transformation Algorithm 1.4.0. The Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, http://www.zib.de/Optimization/Software/Porta/

11. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Co. 1979.

12. *Gebser M., Kaufmann B., Neumann A., and Schaub T.* Conflict-Driven Answer Set Solving // Proceedings of the Twentieth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'07). AAAI Press/The MIT Press. 2007. pp. 386-392

13. *Biere A., Kepler J.* Plingeling. University, Linz, Austria. http://fmv.jku.at/lingeling/

14. *Berkelaar M., Eikland K., Notebaert P.* lp_solve 5.5.2.0. Open source (Mixed-Integer) Linear Programming system. http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/

15. *Makhorin A.O.* GNU Linear Programming Kit 4.47. http://www.gnu.org/software/glpk/

Бондаренко В.А., *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дискретного анализа, Ярославль*, `bond@bond.edu.yar.ru`

Николаев А.В., *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель, Ярославль*, `werdan.nik@gmail.com`

Сыманович М.Э., *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, студент, Ярославль*, `maxbrainrus@gmail.com`

Шемякин Р.О., *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, студент, Москва*, `ramon93i7@gmail.com`