Триангуляции и кубильяжи многообразий: описание исследований

В работе автора [1] рассматривалась была следующая задача: по заданному набору ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Y_1, \ldots, Y_k$ установить, существует ли симплициальное (или кубическое) n-мерное ориентированное комбинаторное многообразие K, набор линков вершин которого совпадает с точностью до сохраняющего ориентацию изоморфизма с набором $Y_1, \ldots, Y_k$, и если существует, построить его явно. Полностью эта задача вряд ли может быть решена. В статье [1] были получены некоторые частичные положительные результаты, главным из которых является конструкция, которая по каждому набору ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Y_1, \ldots, Y_k$, удовлетворяющему некоторому простому необходимому условию, строит ориентированное n-мерное симплициальное многообразие K, набор линков вершин которого с точностью до изоморфизма имеет вид

$$\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{r}, \underbrace{Y_2, \ldots, Y_2}_{r}, \ldots, \underbrace{Y_k, \ldots, Y_k}_{r}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, -Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_l$$

для некоторых ориентированных $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$, где $-Z$ — сфера Z с обращённой ориентацией.

В той же работе были получены приложения этой конструкции:
1) к кобордизмам многообразий с особенностями;
2) к проблеме Стинрода о реализации циклов;
3) к построению локальных комбинаторных формул для классов Понтрягина (построены явные, хотя и очень неэффективные формулы для всех полиномов от рациональных классов Понтрягина).

К близкой проблематике относится задача, возникшая в работе Купер–Тёрстона 1988 г. [2]. Неформально говоря, проблема состоит в том, насколько простым может быть сделано локальное комбинаторное строение триангуляции (кубильяжа) данного многообразия. Более строгая формулировка: найти для каждого n конечный набор $(n-1)$-мерных комбинаторных сфер такой, чтобы любое n-мерное PL многообразие могло быть триангулировано (кубилировано) так, что линки всех вершин триангуляции изоморфны каким-либо сферам из рассматриваемого набора. Купер и Тёрстон решили эту задачу для $n=3$. Их результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Любое трёхмерное многообразие M^3 обладает кубическим разбиением, в котором к каждому ребру примыкает 3, 4 или 5 кубов, причём объединение рёбер, к которым примыкает по 3 куба, и объединение рёбер, к которым примыкает по 5 кубов, являются непересекающимися одномерными подмногообразиями в M^3.*

Как следствие, любое 3-мерное многообразие может быть триангулировано с 3-мя типами линков вершин.

Произведено исследование проблемы Купер–Тёрстона для $n=4$. Удивительным образом, ответ зависит от сигнатуры многообразия: для нулевой сигнатуры имеется полный аналог теоремы 1; в случае ненулевой сигнатуры требуется добавление двух дополнительных типов линков вершин. При этом методы решения во многом связаны с методами построения многообразий с заданными наборами линков вершин из работы [1].

Список литературы

[1] Гайфуллин А. А., *Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин*, Известия РАН, сер. матем., т. 72 (2008), №5, с. 3–62.

[2] Cooper D., Thurston W. P., *Triangulating 3-manifolds using 5 vertex link types.* Topology **27**:1 (1988), p. 23–25.